

채점에서 풀이로 인정받을 부분을 표시하라(연습한 부분은 답으로 인정하지 않음). 답은 문제 순서와 관계없이 작성할 수 있으나 해당하는 문제 번호를 명확히 표시하라. 답에는 상세한 풀이과정이 있어야 한다.

(1) (20 점) 다음 미분방정식의 일반해(general solution)를 구하라.

- (a) $x^2y'' - xy' + 2y = x$
 (b) $y'' + y = 8 \cos x$

(2) (10 점) 함수 $y_1(t) = e^{-t^2/2}$ 는 미분방정식 $y'' + ty' + y = 0$ 의 해가 됨을 알 수 있다. 이때 다음 물음에 답하라.

- (a) 계수축소법(reduction of order)을 이용하여 다른 한 해의 형태를 $y_2(t)$ 를 추측하라.
 (b) 초기값(initial values) $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 이 주어지 있을 때, 해를 구하라.

(3) (20 점) 다음 급수(series)의 수렴성 여부를 판정하라(판단의 근거를 자세히 쓸 것).

- (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{\sqrt{n^3 + 2n^2 + 3}}$
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}}{\sqrt{n}}$

(4) (10 점) 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)(x-1)^n$ 의 수렴반경과 수렴범위를 각각 구하라.

(5) (10 점) 극방정식(polar equation) $r = 16/(5 - 3 \cos \theta)$ 로 주어진 곡선이 어떤 곡선인지 설명하라.

(6) (10 점) 질량이 2(kg)인 물체가 $k = 1.25(\text{N/m})$ 인 용수철에 매달려 외력 $f(t) = \sin(t)(\text{N})$ 와 감쇠상수 $b = 1(\text{N}\cdot\text{s/m})$ 를 갖는 조건하에 진동을 시작하였다. $x(t)$ 을 물체가 평형점으로부터 떨어진 위치라 할때, 초기조건 $x(0) = 0(\text{m}), x'(0) = 1(\text{m/s})$ 을 만족하는 운동방정식의 해 $x(t)$ 를 구하시오.

(7) (10 점) 극방정식(polar equation) $r = \cos(3\theta)$ 이 주어지 있을 때, 직교좌표계에서 이 곡선의 개형을 그리고, 이사분면(二四分面)에 있는 폐곡선의 넓이를 구하라.

(8) (10 점) 초기값 문제 $y'' - xy' = x^2, y(0) = 0, y'(0) = 0$ 의 해를 원점에서의 멱급수 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 로 표시하라(모든 n 에 대해 a_n 의 일반식을 구하라).

(9) (10 점) 함수 $f(x) = \sqrt{4+x}$ 에 대한 다음 물음에 답하시오.

- (a) 함수 $f(x)$ 의 맥로렌 급수를 구하시오.
 (b) 위에서 구한 맥로렌 급수를 이용하여 $\sqrt{5}$ 를 소수점 둘째자리까지 구하시오.

(10) Extra a_n 이 양수로 이루어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴한다고 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{3/2}$ 의 수렴성 여부를 판단하라.

(11) Extra 함수 f 가 열린구간 $I = (c, d)$ 에서 두번 이상 미분가능하고 구간 I 에서 $f', f'' > 0$ 라 하자. $a, b \in I, a < b$ 에 대해 $f(a) < 0, f(b) > 0$ 이면 두 수 a, b 사이에서 $f(c) = 0$ 이 되는 실수 $a < c < b$ 가 유일하게 존재한다. 이제 수열을 $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_{n+1}), n \geq 1$ 라 정의하자. 이때 다음 사실을 증명하라: $a \leq x \leq b$ 인 임의의 x 에 대해 $f''(x)/f'(x) \leq M$ 이면

$$|c - x_{n+1}| \leq \frac{M}{2} |c - x_n|$$

가 성립하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ 이다. 도움말: 점 c 에서 f 의 Taylor expansion 을 생각하라.